



LEIS DE KEPLER



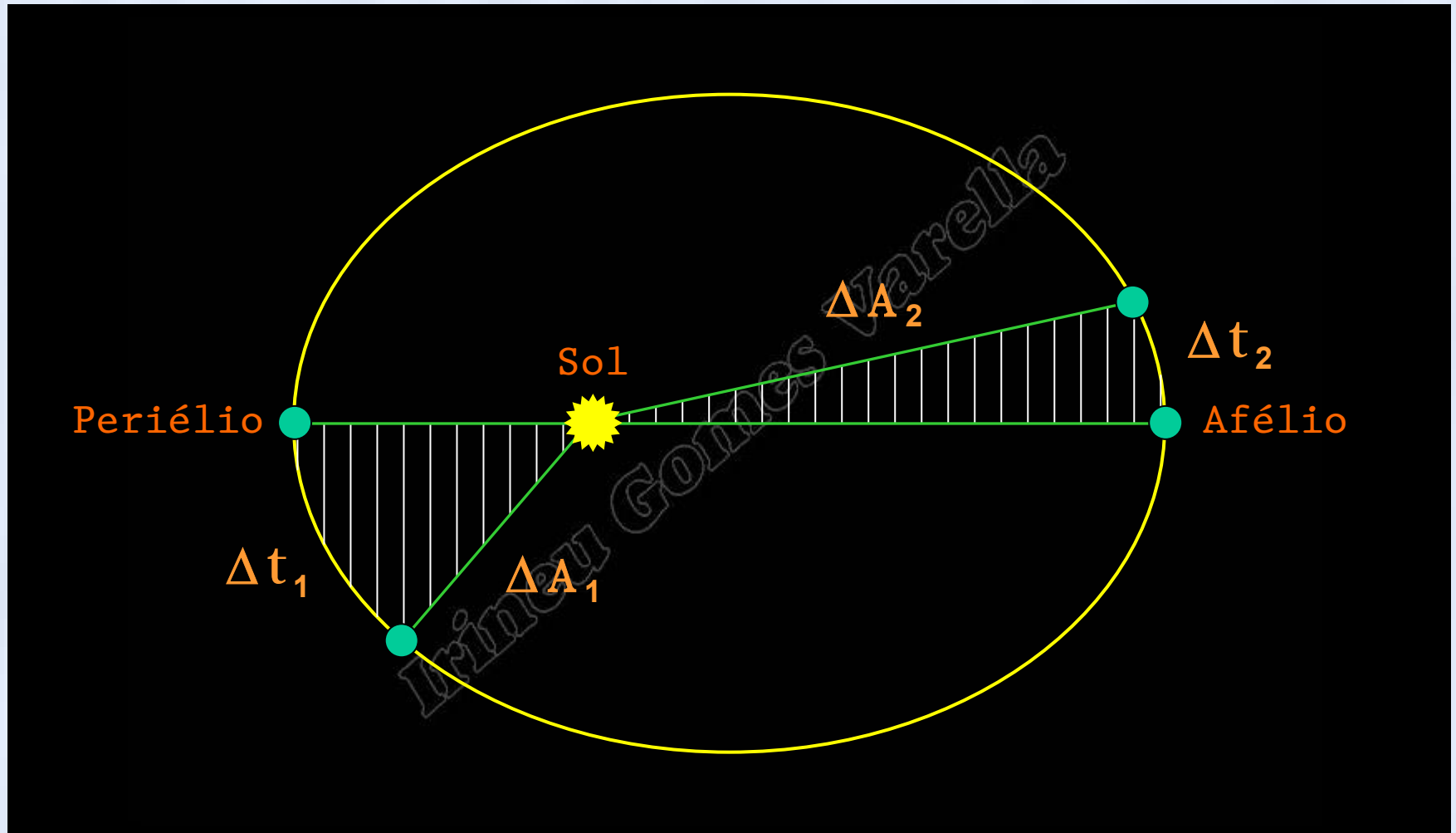
Irineu Gomes Varella
V.5.0 - 2010

LEIS DE KEPLER

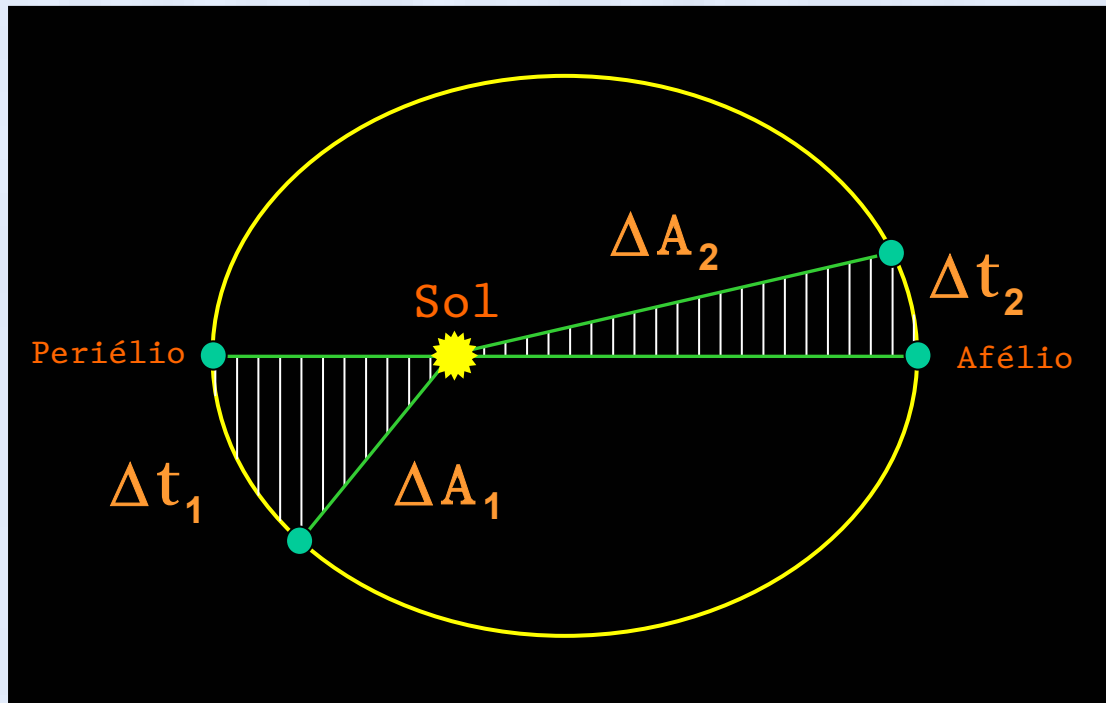
2ª LEI - LEI DAS ÁREAS (1609):

O raio-vetor de um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.

ÓRBITAS PLANETÁRIAS - 2ª LEI DE KEPLER



ÓRBITAS PLANETÁRIAS - 2ª LEI DE KEPLER



Se $\Delta t_1 = \Delta t_2$

então

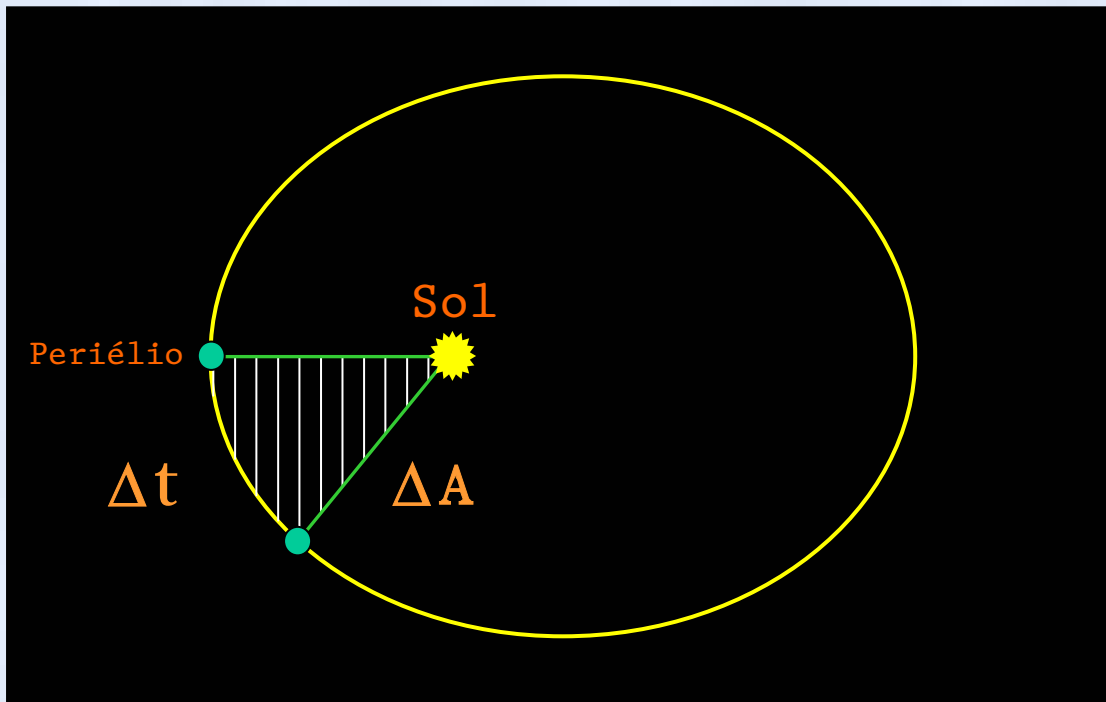
$$\Delta A_1 = \Delta A_2$$

$$\Delta A = K \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2} = K = \text{Velocidade Areolar}$$

VELOCIDADE AREOLAR - 2ª LEI DE KEPLER

2ª Lei: A velocidade areolar é constante.

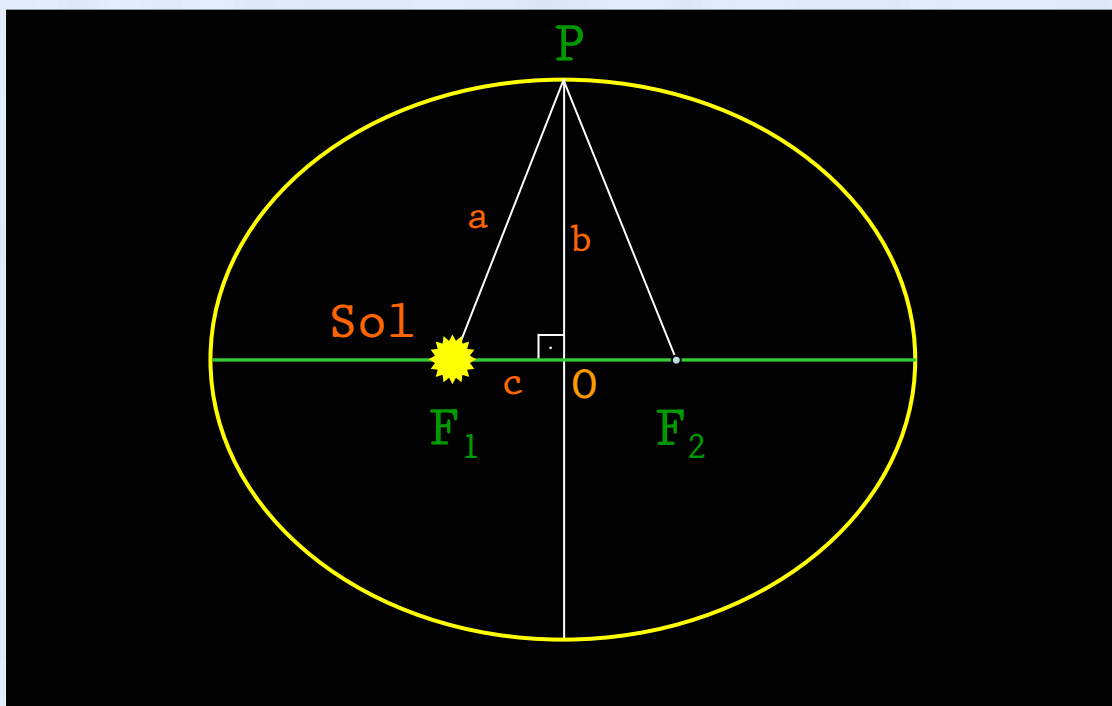


$$\Delta A = K \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = K$$

$$\frac{\pi ab}{P} = K$$

VELOCIDADE AREOLAR - 2ª LEI DE KEPLER



$$\frac{\pi ab}{P} = K$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

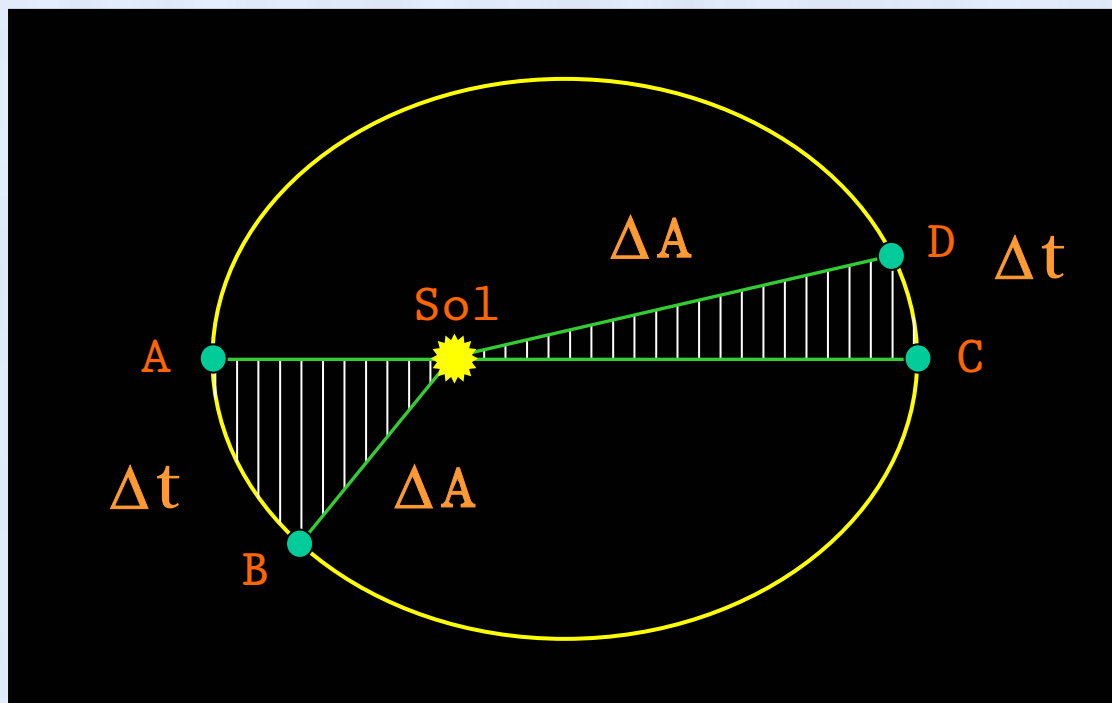
$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$b = a \sqrt{(1 - e^2)}$$

Velocidade Areolar:
$$K = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2}{P} \sqrt{(1 - e^2)}$$

ÓRBITAS PLANETÁRIAS - 2ª LEI DE KEPLER



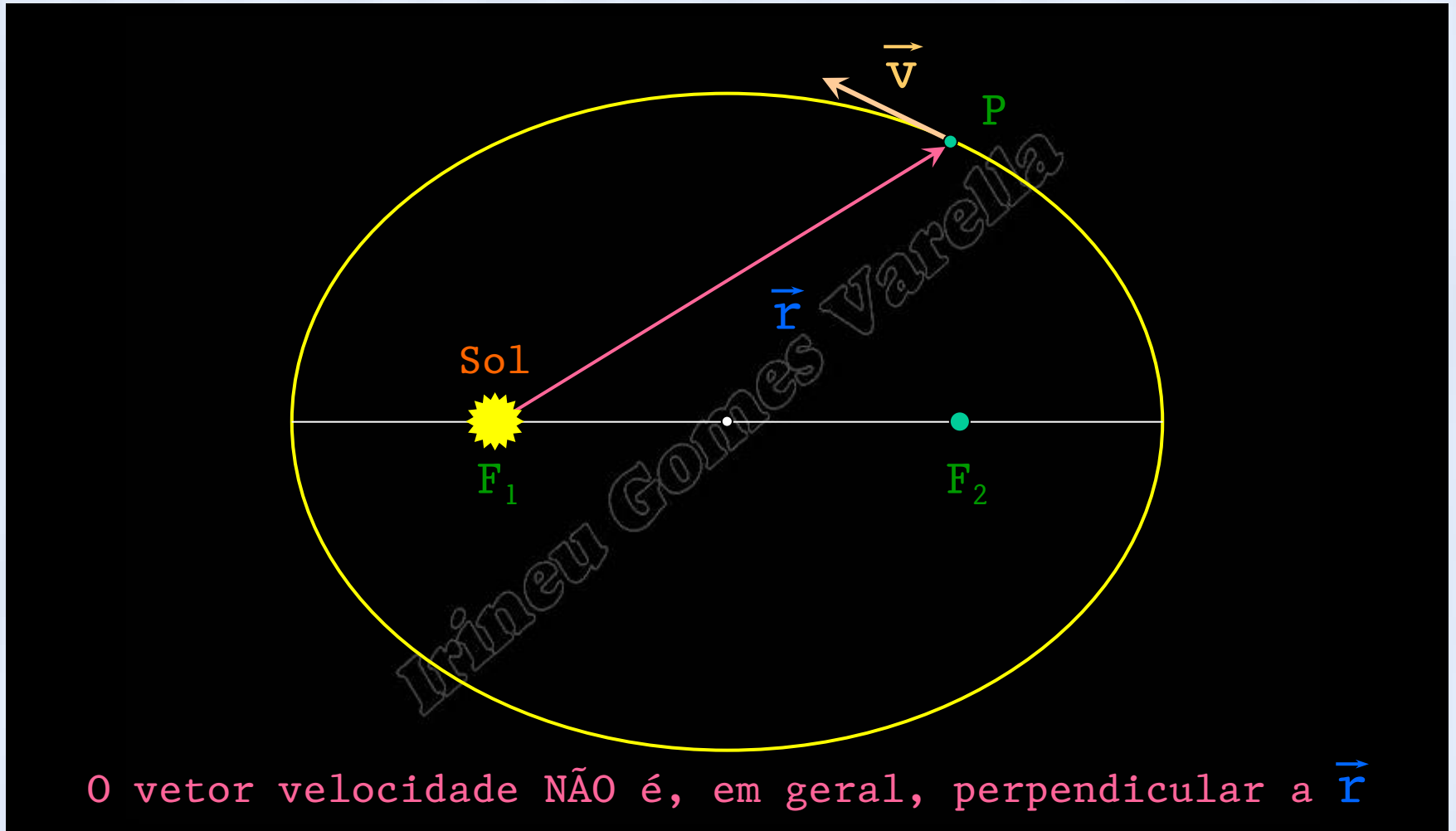
$$A_{SAB} = A_{SCD}$$

então

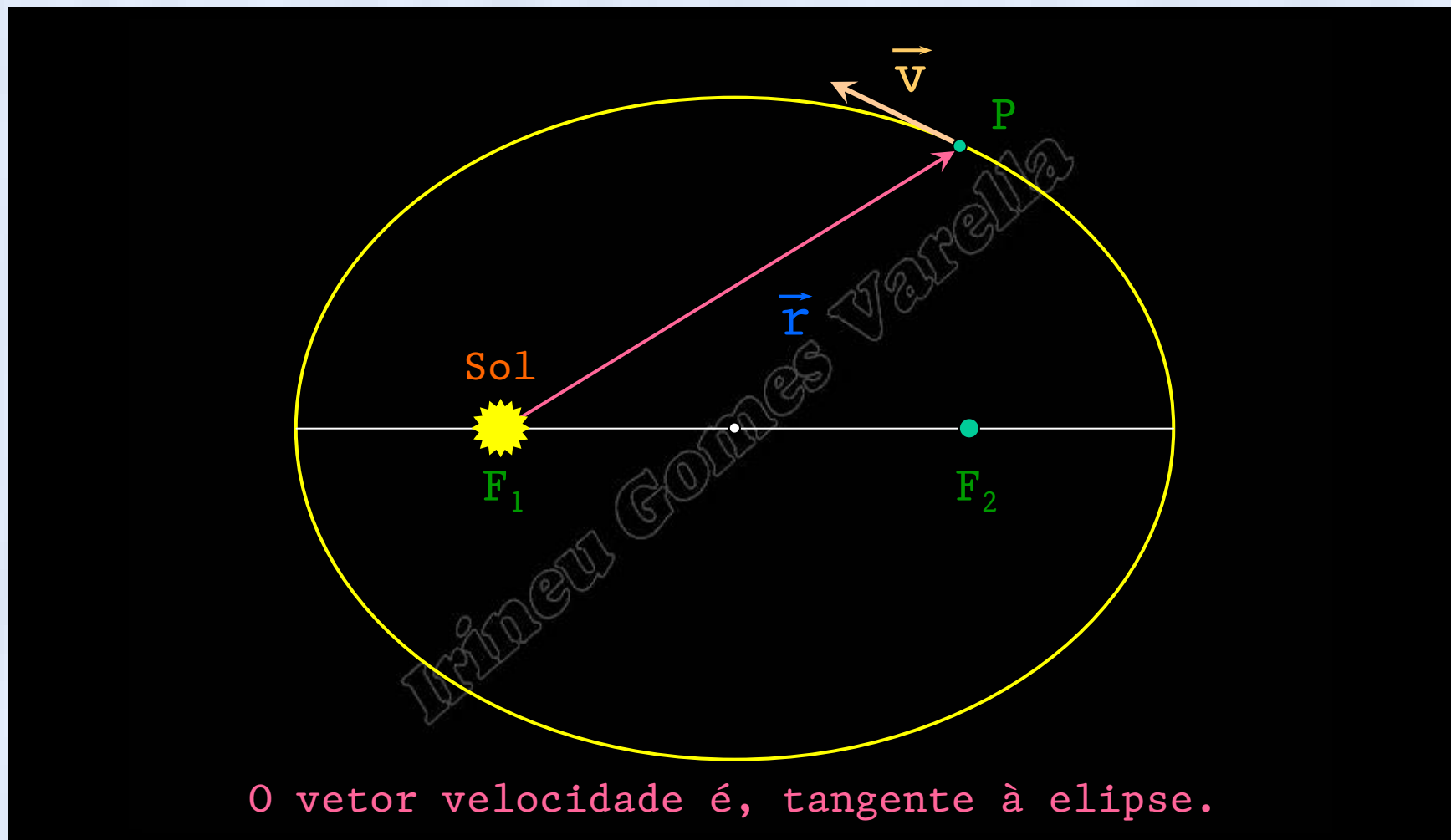
$$AB > CD$$

Como ambos foram percorridos no mesmo intervalo de tempo, $V_{AB} > V_{CD}$.

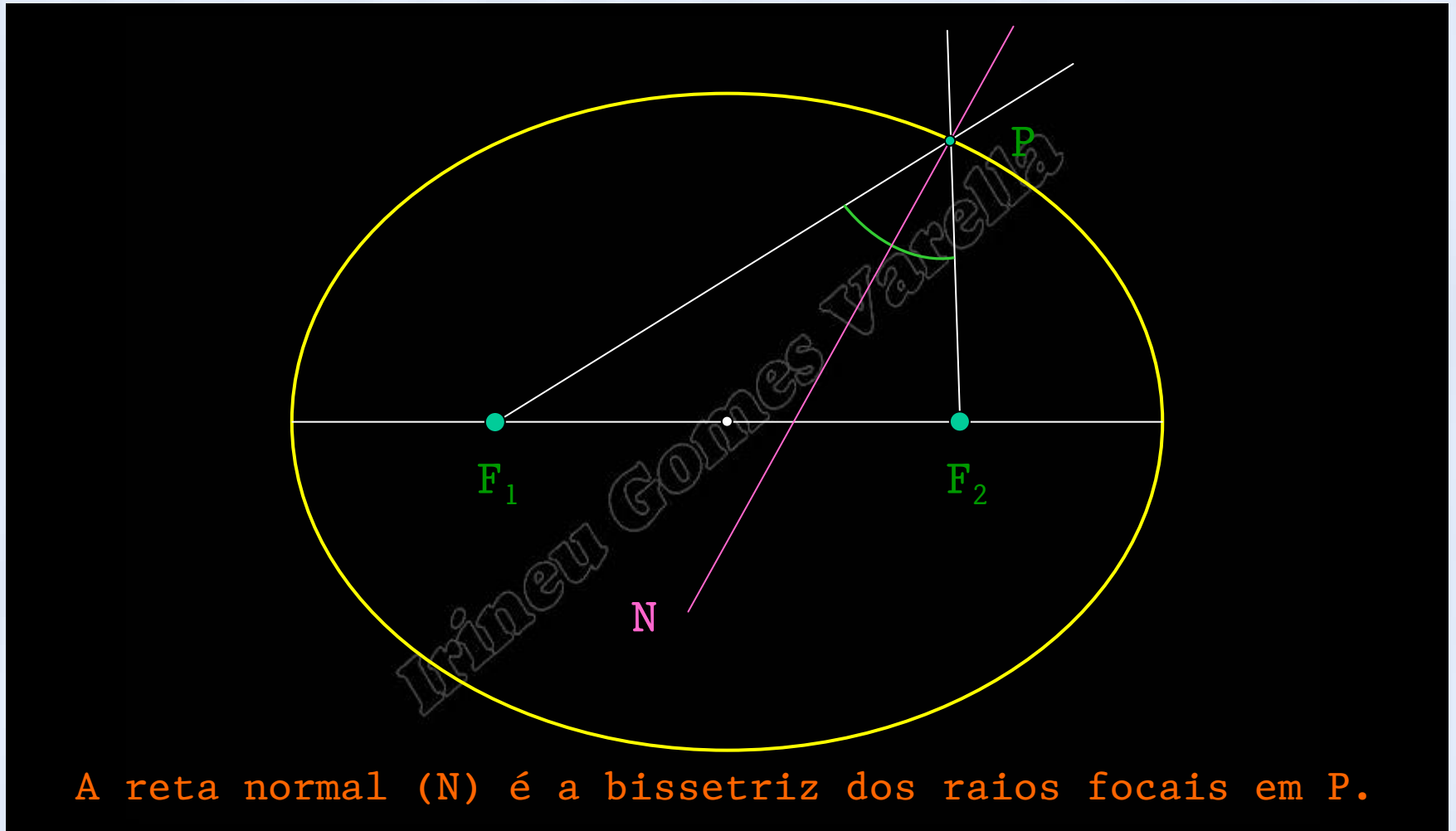
VELOCIDADE LINEAR ORBITAL



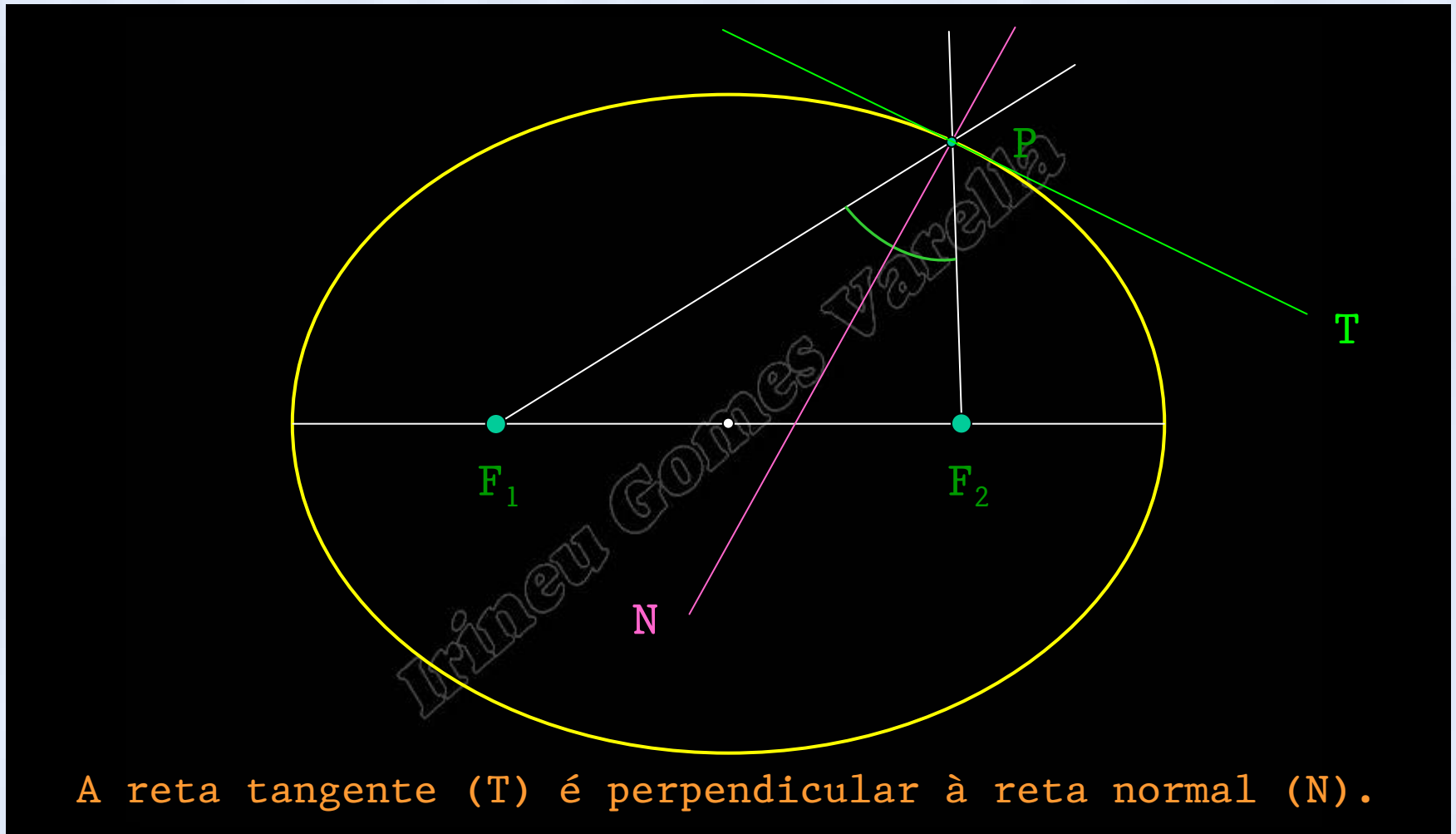
VELOCIDADE LINEAR ORBITAL



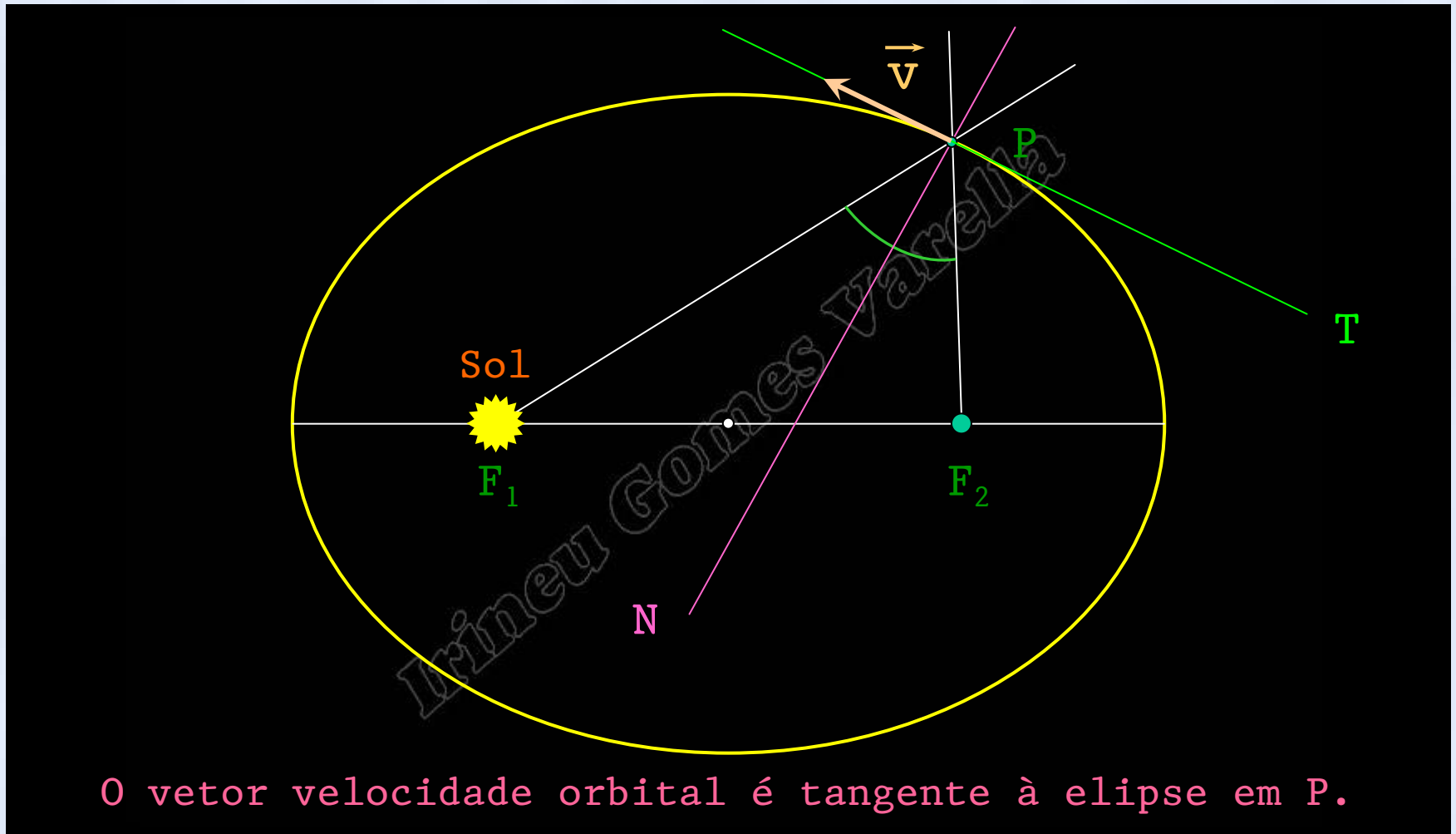
TANGENTE E NORMAL À ELIPSE



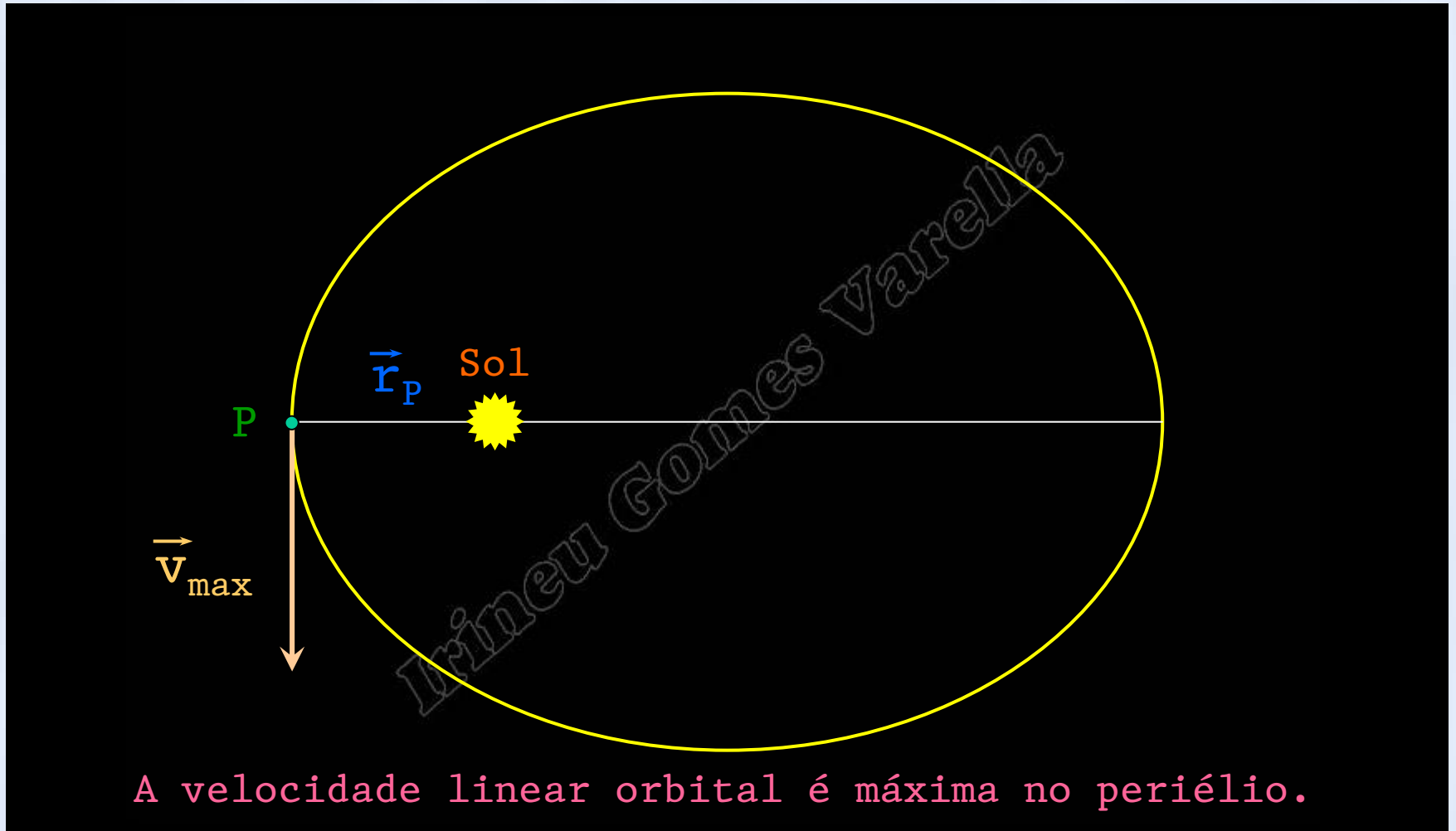
TANGENTE E NORMAL À ELIPSE



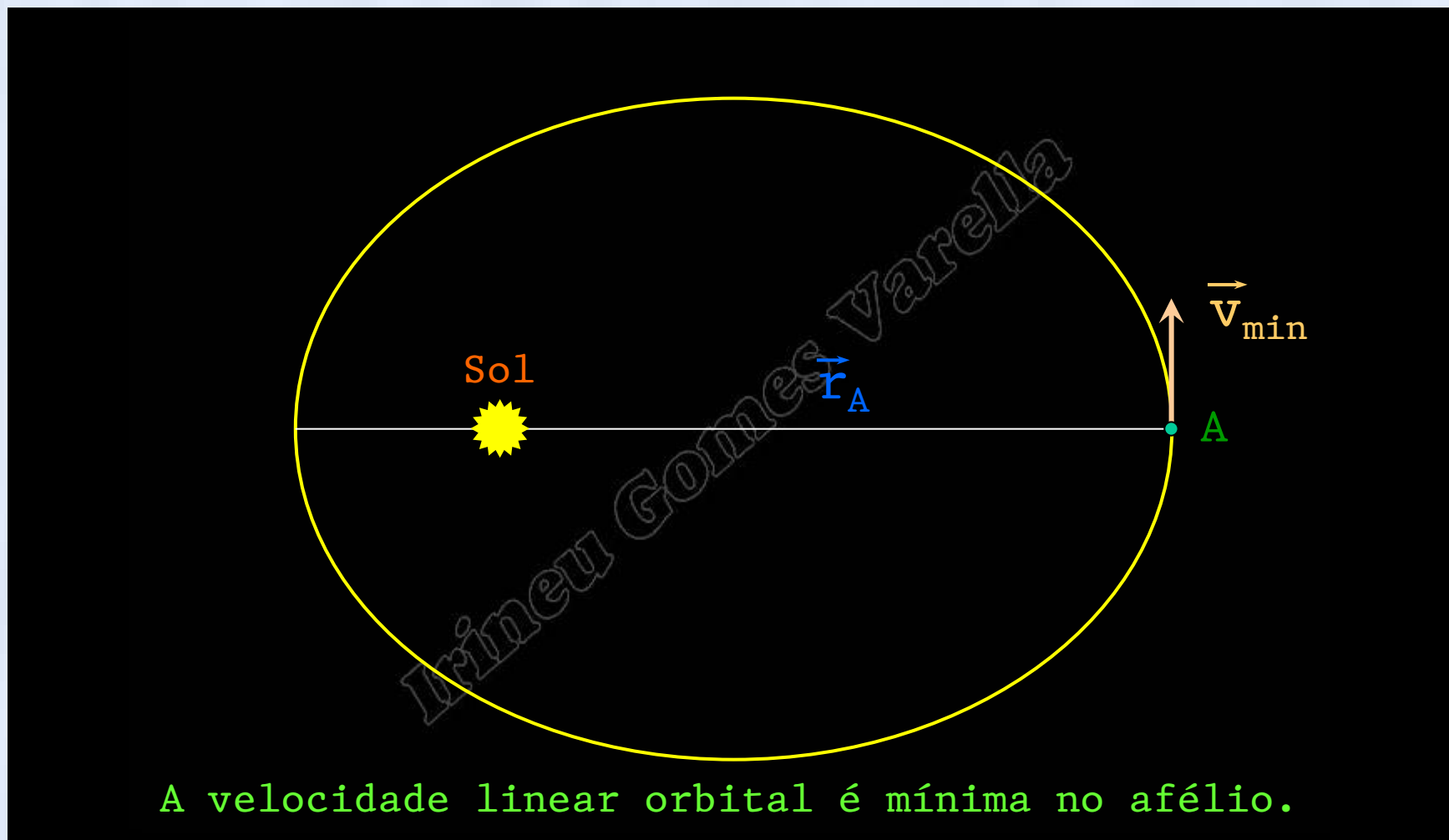
TANGENTE E NORMAL À ELIPSE



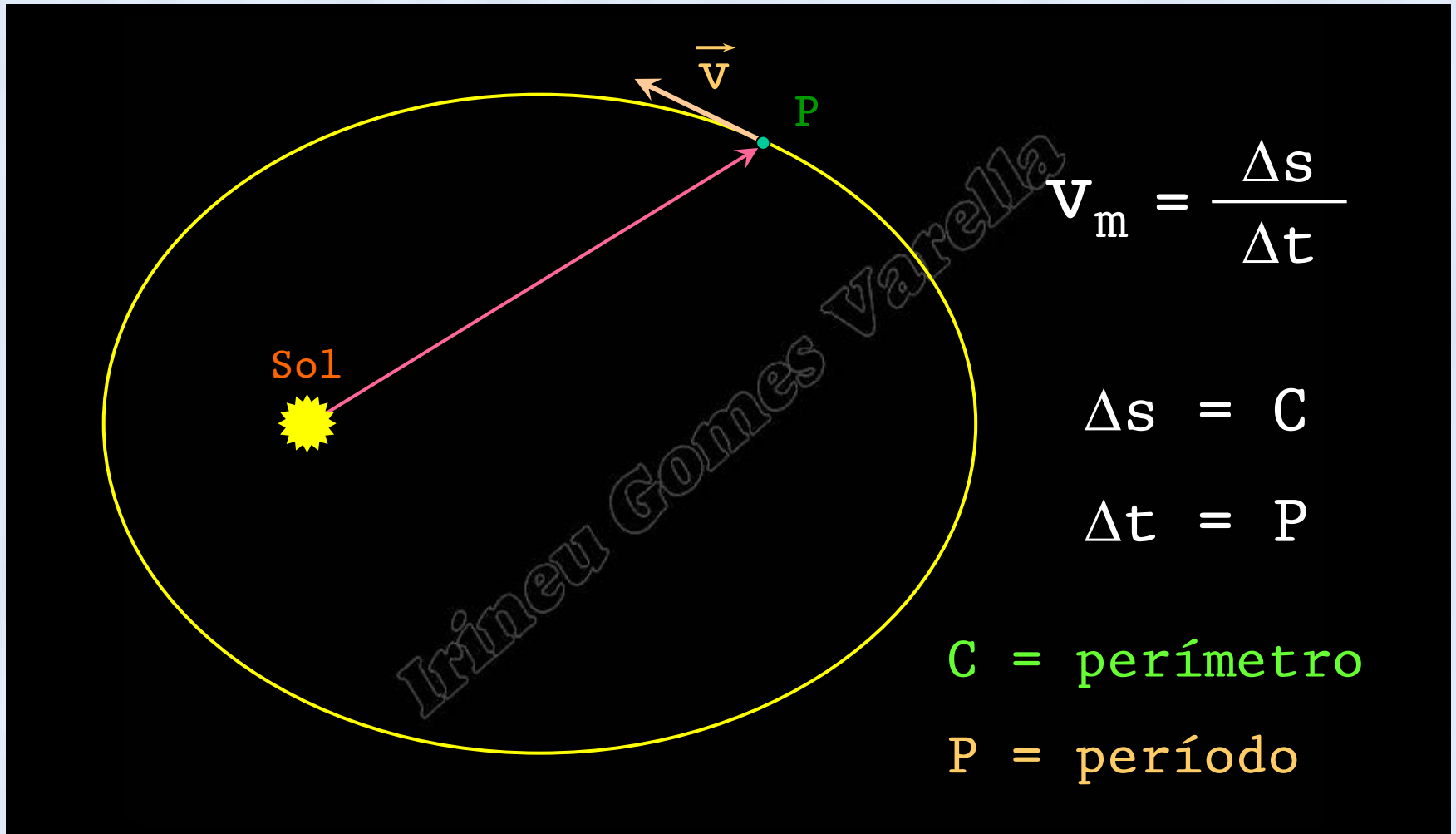
VELOCIDADE LINEAR ORBITAL



VELOCIDADE LINEAR ORBITAL

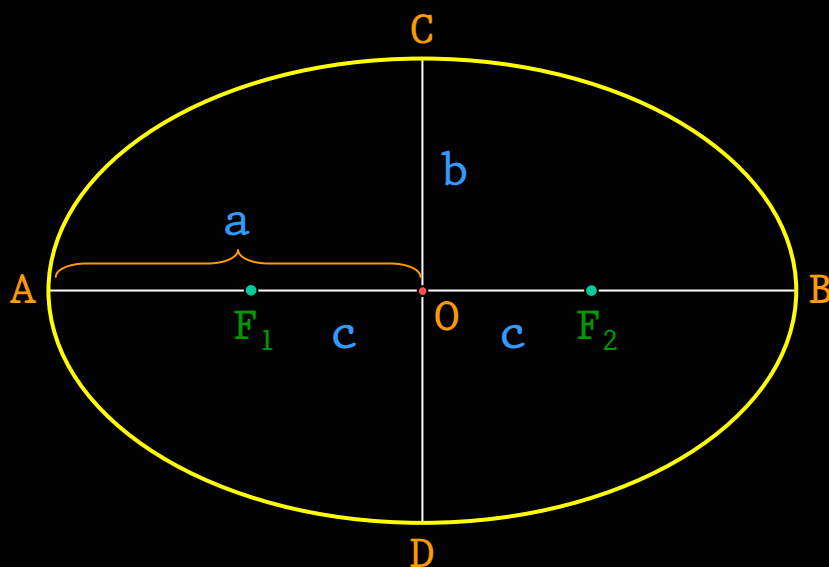


VELOCIDADE ORBITAL MÉDIA



PERÍMETRO DA ELIPSE

Não há fórmulas que permitam calcular de maneira exata o perímetro de uma elipse. Existem algumas expressões aproximadas:



Kepler, 1609

$$C = 2\pi \sqrt{a \cdot b}$$

Após Kepler:

$$C = 2\pi \frac{a + b}{2}$$

PERÍMETRO DA ELIPSE

$$C = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (\text{Euler})$$

$$C = \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)(3a+b)} \right] \quad (*)$$

$$C = \pi (a+b) \left[1 + \frac{3 \cdot h}{10 + \sqrt{4 - 3 \cdot h}} \right] \quad (*)$$

$$h = (a-b) / (a+b) \quad (*) \text{ Ramanujan}$$

PERÍMETRO DA ELIPSE

PARA SABER MAIS:

Approximations of Ellipse Perimeters:

<http://www.ebyte.it/library/docs/math05a/EllipsePerimeterApprox05.html>

Irineu Gomes Varella

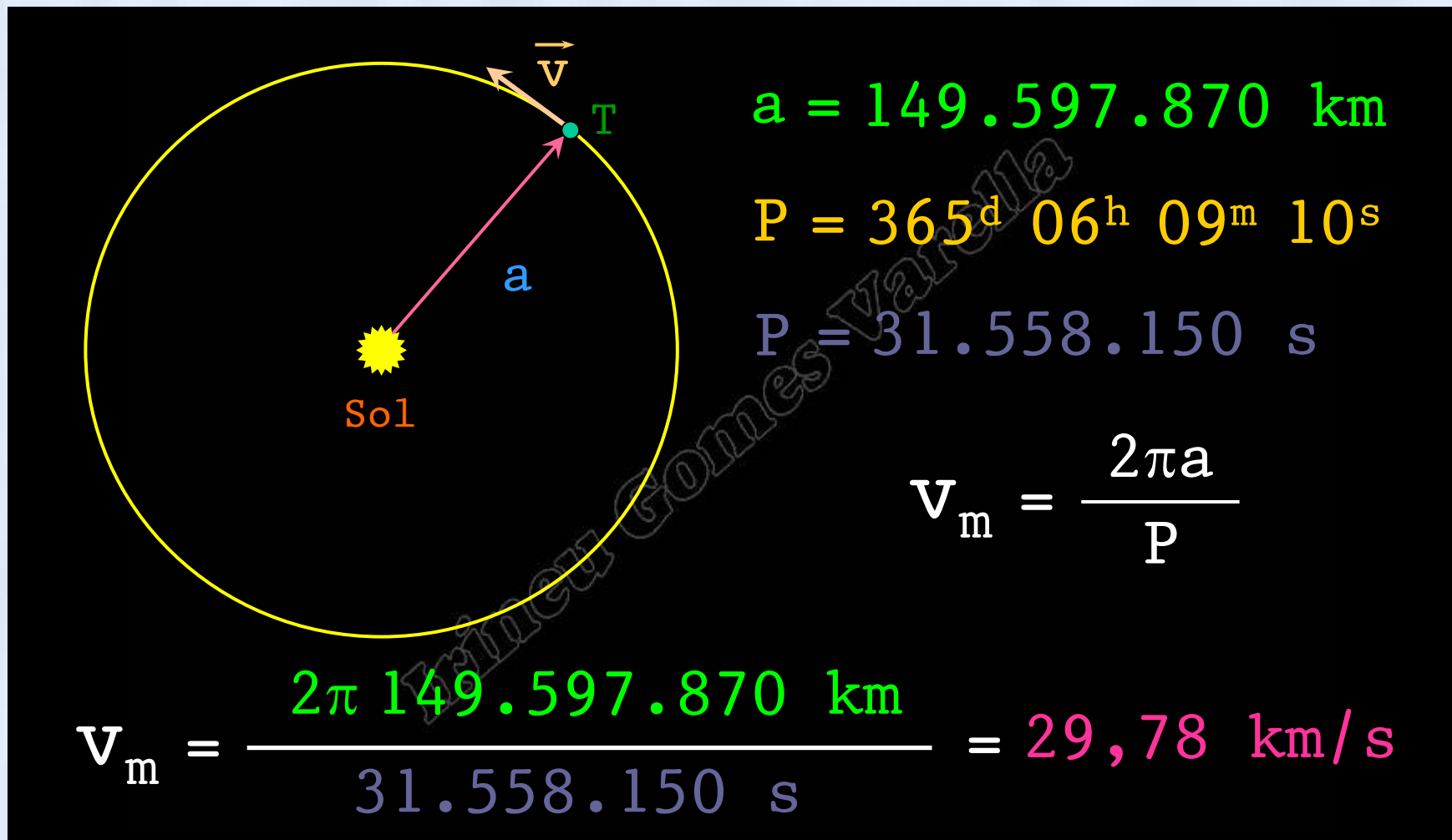
VELOCIDADE ORBITAL MÉDIA

Para órbitas com pequena excentricidade:

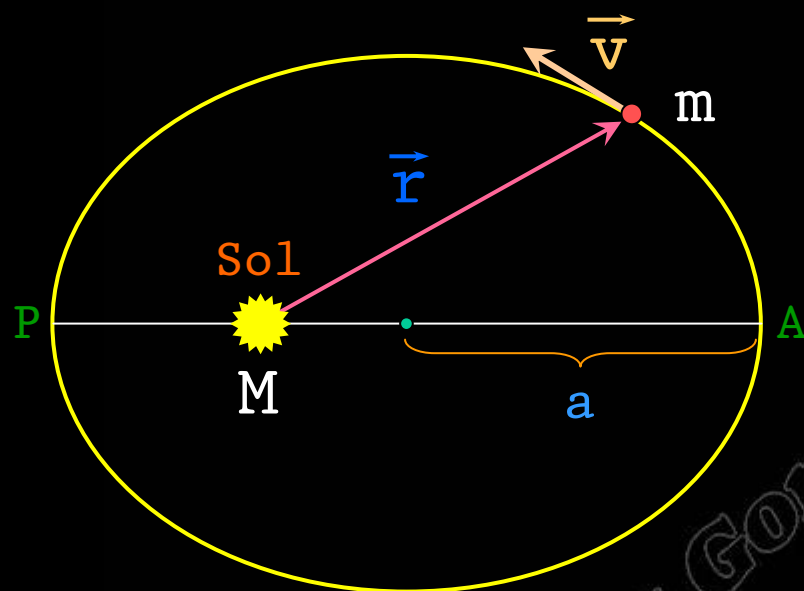
Velocidade Orbital Média é a velocidade orbital que o planeta teria se efetuasse um movimento circular e uniforme ao redor do Sol descrevendo uma circunferência de raio "a" e período "P".

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta s = 2\pi a \\ \Delta t = P \end{array} \right. \quad v_m = \frac{2\pi a}{P}$$

VELOCIDADE ORBITAL MÉDIA DA TERRA



VELOCIDADE ORBITAL DOS PLANETAS



$$v^2 = G(M+m) \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$$

$$r_P = a \cdot (1-e)$$

$$v_P^2 = \frac{G(M+m)}{a} \frac{1+e}{1-e}$$

$$r_A = a \cdot (1+e)$$

$$v_A^2 = \frac{G(M+m)}{a} \frac{1-e}{1+e}$$

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{1+e}{1-e}$$

